ELSEVIER

Discrete Mathematics 180 (1998) 221–241

DISCRETE MATHEMATICS

Fonctions de Dirichlet d'ordre n et de paramètre t

Hoang Ngoc Minh*

LIFL, UA 369 CNRS & Université de Lille II, 59024 Lille Cedex, France

Received 18 July 1995; received in revised form 9 January 1997; accepted 17 February 1997

Résumé

Soit $\{g_k\}_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes de série génératrice $G(z)=\sum_{k\geqslant 1} g_k z^k$. Nous définissons, en premier lieu, la *fonction de Dirichlet* associée à $\{g_k\}$, d'ordre $n\geqslant 1$ et de paramètre $t\notin \mathbb{Z}_-^*$, comme étant l'évaluation du mot $x_1 x_0^{n-1}$ par rapport aux formes différentielles $\mathrm{d}\alpha(x_0)=\mathrm{d}z/z$ et $\mathrm{d}\alpha(x_1)=G(z)\,\mathrm{d}z/z^{1-t}$. Nous établissons ensuite les propriétés combinatoires de cette fonction dans le cadre de *l'algèbre de mélange des séries formelles en les indéterminées non commutatives* et à l'aide du *calcul symbolique*. Plus généralement, avec les formes différentielles de même type, nous exprimons l'évaluation des mots de la forme $x_{i_1}x_0^{n_1}\ldots x_{i_p}x_0^{n_p}$ et, en particulier, des mots de Lyndon ou de Širšov en combinant avec les fonctions de Dirichlet. En examinant la *représentation matricielle minimale*, nous établissons l'évaluation des *séries rationnelles*. En particulier, l'évaluation des *fractions rationnelles non commutatives* de la forme $x_{i_1}(c_1x_0)^*\ldots x_{i_p}(c_px_0)^*$ nous conduit, via le *théorème de convolution*, aux *fonctions spéciales du type hypergéométrique*.

1. Introduction

Les bases de l'algèbre de Lie libre sur un alphabet munies de l'ordre lexicographique (base de Chen–Fox–Lyndon, base de Hall, base de Širšov, ... [25,26,32]) sont adéquates pour la résolution des systèmes dynamiques. L'idée centrale d'un tel calcul, selon le point de vue d'un géomètre, est d'éviter les calculs inutiles lors des manipulations des crochets de Lie des opérateurs différentiels décrivant la trajectoire de l'état du système (la graduation et la factorisation de la série de Chen [10,11,31], la formule de Campbell–Baker–Hausdorff–Dynkin [30], ...). Ici, nous transposons ces techniques, dans un point de vue dual au précédent, pour déterminer *l'évaluation avec les entrées rationnelles des séries génératrices* (les *fonctionnelles causales* [4,5]):

* E-mail: hoang@lifl.fr.

PII S0012-365X(97)00117-9

1. En nous plaçant dans le cadre de l'analyse complexe, nous considérons, pour simplifier, les entrées suivantes:[1]

$$a_0(z)=\frac{1}{z},\qquad a_1(z)=\frac{G_1(z)}{z^{1-t_1}}\quad \text{et}\quad a_2(z)=\frac{G_2(z)}{z^{1-t_2}},$$

où t_1,t_2 et $t_1+t_2\notin\mathbb{Z}_-^*, G_1(z)=\sum_{k\geqslant 1} g_{1,k}z^k$ et $G_2(z)=\sum_{k\geqslant 1} g_{2,k}z^k$ sont telles que a_1 et a_2 soient méromorphes dans un domaine obtenu en coupant le plan complexe depuis zéro et depuis chaque singularité de G_1 et G_2 jusqu'à l'infini sans croisement. Nous exprimons les évaluations à l'aide des *fonctions de Dirichlet, d'ordre n et de paramètre t_i*, obtenues comme étant l'évaluation des mots $x_ix_0^{n-1}$ ($i=1$ ou 2):[2]

$$\mathrm{Di}_n(G_i|t_i,z)=\alpha_0^z(x_ix_0^{n-1})=\sum_{k\geqslant 1} g_{i,k}\frac{z^{k+t_i}}{(k+t_i)^n}.$$

La construction de la fonction génératrice pour ces fonctions revient à calculer l'évaluation de la série rationnelle $x_i(cx_0)^*$. Si, en particulier, $G_i(z)=z^c(1-z)^{-a_i}$ alors:

$$\sum_{n\geqslant 0} c^n\mathrm{Di}_{n+1}(G_i|t_i,z)=\alpha_0^z[x_i(cx_0)^*]=\frac{\Gamma(a_i)\Gamma(t_i+1-a_i)}{\Gamma(t_i+1)}z^{c+t_i}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a_i,t_i\\ t_i+1\end{matrix}\,|\,z\right).$$

Avec les mêmes entrées, nous calculons systématiquement, en explorant *l'agèbre de mélange des séries formelles* définie sur l'alphabet $X=\{x_0,x_1,x_2\}$ et en utilisant *les fonctions spéciales* (voir Section 2):

- L'évaluation des mots $x_{i_1}x_0^{n_1}\ldots x_{i_p}x_0^{n_p}$ et en particulier, les mots de Lyndon ou de Širšov. Cette évaluation nous conduit aux *polylogarithmes de N. Nielsen.*
- L'évaluation des séries rationnelles et en particulier, des fractions rationnelles non commutatives $x_{i_1}(c_1x_0)^*\ldots x_{i_p}(c_px_0)^*$. Cette évaluation nous conduit aux *fonctions hypergéométriques.*

2. Puisque l'analyse du comportement d'entrée/sortie d'un système consiste à étudier la sortie en fonction des entrées [27–29], il est alors important de déterminer la nature de la sortie en fonction celle des entrées et d'expliciter la sortie (par exemple, en utilisant *les combinaisons de polynômes exponentiels* si nous nous limitons aux entrées polynomiales ou polynomiales exponentielles [2,11]). Ici, nous poursuivons

[1] Lorsque $t_2=0$ et $G_2(z)=z$ nous incluons alors le cas avec la dérive.

[2] La fonction $\mathrm{Di}_n(G_i|0,z)$ n'est rien d'autre que la fonction génératrice polylogarithmique d'ordre n associée à $\{g_{i,k}\}_{k\geqslant 1}$ [14]. Lorsque la suite $\{g_{i,k}\}_{k\geqslant 1}$ est constante et égale à $1, \mathrm{Di}_n(G_i|0,z)$ coïncide avec le n-polylogarithme, $\mathrm{Di}_n(G_i|0,1)$ coïncide avec la fonction zêta de Riemann et $\mathrm{Di}_n(G_i|t_i,1)$ avec celle d'Hurwitz [20]:

$$\mathrm{Li}_n(z)=\mathrm{Di}_n(G_i|0,z)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^k}{k^n},$$

$$\zeta(n)=\mathrm{Di}_n(G_i|0,1)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^n}\quad \text{et}\quad \zeta(n,t_i)=\mathrm{Di}_n(G_i|t_i,1)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k+t_i)^n}.$$

la même problématique en considérant *les entrées rationnelles* décrites plus haut. Nous explicitons la sortie, non seulement avec les fonctions usuelles, mais aussi avec les polylogarithmes, hyperlogarithmes ou hypergéométriques en nous basant sur *le calcul exact*, aussi bien que *les approximations par les polynômes* ou *les approximations par les séries rationnelles* des séries génératrices:

- Lorsqu'une série S est un polynôme, il suffit de remplaçer chaque mot w dans S par son évaluation. Mais, d'après les propriétés des intégrales itérées [3] et d'après le théorème de Radford [25], on peut aussi écrire chaque polynôme dans la base de Lyndon ou dans la base de Širšov. Puis avec le théorème de convolution [13], on accélère le calcul de l'évaluation de chaque mot de Lyndon ou de Širšov. On accélère, en conséquence, celui des polynômes. D'après les mêmes propriétés, on a aussi intérêt à écrire chaque polynôme dans la base duale de la base PBW-Lyndon ou PBW-Širšov puisque le calcul de l'évaluation se simplifie grandement. Ainsi, il est possible d'exprimer une telle sortie à l'aide des polylogarithmes de N. Nielsen (voir Section 3).
- Lorsqu'une série S est infinie, on peut toujours l'approximer [3] en la tronquant et on se ramène ainsi au cas polynomial. Cependant il n'est pas question de tronquer systématiquement les séries rationnelles puisque certaines se prètent relativement facilement à l'évaluation (voir Section 4). En outre, Hespel et Jacob ont montré que l'on peut approximer la série génératrice S par des séries rationnelles mieux que par des polynômes. Leurs algorithmes sont basés sur un calcul d'une série R rationnelle ayant les mêmes coefficients que la série S pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à k et fournissent des approximants rationnels de type Padé non commutatif [6–9].[4] Dans le même ordre d'idée, des techniques combinatoires, utilisant des arbres croissants et des chemins de Motzkin, sont également développées par Lamnabhi–Lagarrigue, Leroux et Viennot [18, 19]. L'ensemble des deux approches incluent aussi bien la linéarisation de Carleman que les développements finis de Volterra [27–29]. Cela nous amène à calculer l'évaluation des séries rationnelles (les séries génératrices des systèmes dynamiques *bilinéaires* [4]).
- En examinant la représentation matricielle minimale d'une série rationnelle S, nous donnons trois situations permettant d'en calculer exactement l'évaluation (voir Section 4). La première se base sur une *forme graduée* des séries rationnelles et exprime les développements fonctionnels des sorties en combinaison linéaire de fonctions hypergéométriques. La deuxième concerne les séries

[3] Ici, on suppose que la série formelle S est à coefficients dans un anneau commutatif, unitaire et muni de la topologie discrète. On muni l'algèbre des séries formelles de la topologie produit définie par une distance ultramétrique (voir [1] pour plus de précisions).

[4] Les simulations numériques, avec les entrées et sorties polynomiales exponentielles, effectuées par Boussemart [2] ont déjà montré que les approximations rationnelles sont plus intéressantes tant au point de vue rapidité de calcul d'évaluation qu'au point de vue fiabilité des résultats par rapport aux approximations polynomiales.

rationnelles *échangeables* et montre que les sorties sont des fonctions analytiques des logarithmes (primitives des entrées). La dernière utilise des *formes factorisées* des séries rationnelles pour mettre les sorties forme d'un polynôme en les polylogarithmes de N. Nielsen et leur exponentiel.

2. Transformation d'évaluation et fonctions spéciales

Rappelons que l'évaluation d'un mot w sur l'alphabet $X=\{x_0,\ldots,x_m\}$, notée $\alpha_\varsigma(w)$, part rapport aux formes différentielles $\mathrm{d}\alpha(x_0)=\mathrm{d}z/u_0,\ldots,\mathrm{d}\alpha(x_m)=\mathrm{d}z/u_m$, est l'intégrale itérée de Chen associée à w [3]:

$$\alpha_\varsigma^z(w)=\int_\varsigma^z\int_\varsigma^{s_k}\cdots\int_\varsigma^{s_2}\frac{\mathrm{d}s_1}{u_{i_1}(s_1)}\cdots\frac{\mathrm{d}s_k}{u_{i_k}(s_k)}.$$

L'évaluation de w, notée $\alpha_\varsigma(\kappa_\varsigma;w)$, pour le noyau κ_ς s'annulant en ς et par rapport aux mêmes formes différentielles, est définie récursivement comme suit [13, 14]:

$$\alpha_\varsigma^z(\kappa_\varsigma;w)=\begin{cases}\kappa_\varsigma(z) & \text{si } w=\varepsilon,\\ \displaystyle\int_\varsigma^z \alpha_\varsigma^s(\kappa_\varsigma;v)\frac{\mathrm{d}s}{u_i(s)} & \text{si } w=vx_i,(v\in X^*,x_i\in X).\end{cases}$$

Elle est l'unique solution s'annulant en ς de l'équation différentielle algébrique suivante:

$$\left(u_{i_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\circ\cdots\circ\left(u_{i_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)(f)=\kappa_\varsigma.$$

L'évaluation d'une série formelle S sur X, est définie (sous conditions de convergence) comme suit [13, 14]:

$$\alpha_\varsigma(\kappa_\varsigma;S)=\sum_{w\in X^*}\langle S|w\rangle\alpha_\varsigma(\kappa_\varsigma;w).$$

L'évaluation sans noyau de S est la fonction $\alpha_\varsigma(S)=\alpha_\varsigma(1;S)$.

Dans ce qui suit, nous considérons les formes différentielles suivantes:

$$\mathrm{d}\alpha(x_0)=\frac{\mathrm{d}z}{z},\qquad \mathrm{d}\alpha(x_1)=G_1(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{1-t_1}}\quad\text{et}\quad \mathrm{d}\alpha(x_2)=G_2(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{1-t_2}},$$

où t_1,t_2 et $t_1+t_2\notin\mathbb{Z}_-^*$, $G_1(z)=\sum_{k\geqslant1}g_{1,k}z^k$ et $G_2(z)=\sum_{k\geqslant1}g_{2,k}z^k$ telles que $G_1(z)/z^{1-t_1}$ et $G_2(z)/z^{1-t_2}$ soient méromorphes dans un domaine obtenu en coupant le plan complexe depuis zéro et depuis chaque singularité de G_1 et G_2 jusqu'à l'infini sans croisement. Le disque unité ouvert centré en zéro est noté par $\mathcal{U}$.

2.1. L'évaluation des mots $x_{i_1}x_0^{n_1}\dots x_{i_p}x_0^{n_p}$

Proposition 2.1. *S'il existe un chemin d'intégration Γ_ς^z inclus dans $\mathcal{U}$ alors, pour $n \geqslant 1$, nous avons:*

$$\alpha_\varsigma^z(x_i x_0^{n-1}) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \log^l\left(\frac{z}{\varsigma}\right) \alpha_\varsigma^z(x_i x_0^{n-1-l}) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_\varsigma^z \log^{n-1}\left(\frac{s}{\varsigma}\right) \mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_i),$$

$$\alpha_\varsigma^z(x_i x_0^{n-1}) = \alpha_0^z(x_i x_0^{n-1}) - \sum_{l=1}^{n} \alpha_0^\varsigma(x_i x_0^{l-1}) \frac{1}{(n-l)!} \log^{n-l}\left(\frac{z}{\varsigma}\right),$$

$$\alpha_\varsigma^z(x_i x_0^{n-1}) = \sum_{k\geqslant 1} g_{i,k} \frac{z^{k+t_i}}{(k+t_i)^n} - \sum_{l=1}^{n} \left[\sum_{k\geqslant 1} g_{i,k} \frac{\varsigma^{k+t_i}}{(k+t_i)^l}\right] \frac{1}{(n-l)!} \log^{n-l}\left(\frac{z}{\varsigma}\right).$$

Preuve. En utilisant la définition récursive du produit de mélange [1], nous avons successivement:

$$\begin{aligned} x_i x_0^{n-1} &= x_0 \sqcup\!\sqcup\, x_i x_0^{n-2} - (x_0 \sqcup\!\sqcup\, x_i x_0^{n-3}) x_0 \\ &= x_0 \sqcup\!\sqcup\, x_i x_0^{n-2} - x_0^2 \sqcup\!\sqcup\, x_i x_0^{n-3} + (x_0^2 \sqcup\!\sqcup\, x_i x_0^{n-4}) x_0 \\ &\;\vdots \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{i+1} x_0^l \sqcup\!\sqcup\, (x_i x_0^{n-1-l}) + (-1)^{n-1} x_0^{n-1} x_i. \end{aligned}$$

Ainsi, la première expression est alors une conséquence directe des propriétés des intégrales itérées [3]. Il en est de même pour la seconde expression. La dernière expression peut être obtenue simplement par récurrence. □

Corollaire 2.1. *S'il existe un chemin d'intégration Γ_0^z inclus dans $\mathcal{U}$ alors, pour tous $n, m \geqslant 1$, nous avons:*

(i) $$\alpha_0^z(x_i x_0^{n-1}) = \sum_{k\geqslant 1} g_{i,k} \frac{z^{k+t_i}}{(k+t_i)^n},$$

(ii) $$\alpha_0^z(x_i x_0^{n-1} x_j x_0^{m-1}) = \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{g_{i,l} g_{j,k-l}}{(l+t_i)^n}\right] \frac{z^{k+t_i+t_j}}{(k+t_i+t_j)^m},$$

(iii) $$\begin{aligned} \alpha_0^z[(x_i x_0^{n-1}) \sqcup\!\sqcup\, (x_j x_0^{m-1})] &= \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{g_{i,l} g_{j,k-l}}{(l+t_i)^n (k-l+t_j)^m}\right] z^{k+t_i+t_j} \\ &= \sum_{k\geqslant 2} A_k \frac{z^{k+t_i+t_j}}{(k+t_i+t_j)^{n+m}}, \end{aligned}$$

$$\textit{avec: } A_k=\sum_{l=1}^{k-1} g_{i,l}g_{j,k-l}\left[\sum_{r=0}^{n-1}\binom{m-1+r}{r}\frac{(k+t_i+t_j)^{n+r}}{(l+t_i)^{n-r}}\right.$$
$$\left.+\sum_{s=0}^{m-1}\binom{n-1+s}{s}\frac{(k+t_i+t_j)^{m+s}}{(k-l+t_j)^{m-s}}\right].$$

Preuve. (i) D'après la Proposition 2.1, cela est une conséquence directe du fait que $\lim_{\varsigma\to 0}\varsigma^{k+t_i}\log^{n-l}(z/\varsigma)=0$. Il peut s'obtenir aussi par identification des deux dernières expressions de la Proposition 2.1.

(ii) Si $\sum_{k\geqslant 1} g_{i,k}z^{k+t_i}/(k+t_i)^n$ est l'évaluation de $x_ix_0^{n-1}$ (voir (*i*)) alors celle de $x_ix_0^{n-1}x_j$ est:

$$\alpha_0^z(x_ix_0^{n-1}x_j)=\sum_{k\geqslant 1}\left[\sum_{l=1}^{k}\frac{g_{i,l}g_{j,k-l+1}}{(l+t_i)^n}\right]\frac{z^{k+t_i+t_j+1}}{k+t_i+t_j+1}.$$

Par conséquent, en changeant $k+1$ en k et puis en utilisant encore (i), nous avons finalement (ii).

(iii) D'après les propriétés des intégrales itérées, on a $\alpha(x_ix_0^{n-1}\sqcup\!\sqcup\, x_jx_0^{m-1})=\alpha(x_ix_0^{n-1})$ $\alpha(x_jx_0^{m-1})$. Alors d'après (i), le dernier produit Cauchy conduit à la première expression. Pour la seconde expression, en utilisant la définition récursive du produit de mélange $(x_ix_0^{n-1})\sqcup\!\sqcup(x_jx_0^{m-1})=x_i[x_0^{n-1}\sqcup\!\sqcup(x_jx_0^{m-1})]+x_j[(x_ix_0^{n-1})\sqcup\!\sqcup\, x_0^{m-1}]$ et en calculant $x_0^{n-1}\sqcup\!\sqcup(x_jx_0^{m-1})$ et $(x_ix_0^{n-1})\sqcup\!\sqcup\, x_0^{m-1}$, nous déduisons:

$$(x_ix_0^{n-1})\sqcup\!\sqcup(x_jx_0^{m-1})=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{m-1+r}{r}x_ix_0^{n-r-1}x_jx_0^{m+r-1},$$
$$+\sum_{s=0}^{m-1}\binom{n-1+s}{s}x_jx_0^{m-s-1}x_ix_0^{n+s-1}.$$

D'après (ii), nous obtenons alors le résultat désiré. □

Proposition 2.2. *S'il existe un chemin d'intégration Γ_ς^z inclus dans $\mathcal{U}$ alors, pour tous $n,p>0$, nous avons*:

$$\alpha_\varsigma^z(x_ix_0^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\log^{n-k}(z)}{(n-k)!}I_\varsigma^z(x_0^kx_i) \quad \textit{et}$$

$$\alpha_\varsigma^z(x_ix_0^nx_jx_0^p)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{q=0}^{p}\binom{k+q}{q}\frac{\log^{p-q}(z)}{(p-q)!}I_\varsigma^z(x_0^{n-k}x_ix_0^{k+q}x_j),$$

où $I_\varsigma^z(x_0^k x_i)$ *et* $I_\varsigma^z(x_0^k x_i x_0^q x_j)$ *sont les intégrales suivantes*:

$$I_\varsigma^z(x_0^k x_i) = \int_\varsigma^z \frac{[-\log(s)]^k}{k!}\, \mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_i) \quad et$$

$$I_\varsigma^z(x_0^k x_i x_0^q x_j) = \int_\varsigma^z \frac{[-\log(s)]^q}{q!} I_\varsigma^s(x_0^k x_i)\, \mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_j).$$

Preuve. D'après le théorème de convolution [13], nous avons l'évaluation suivante:

$$\alpha_\varsigma^z(\kappa_\varsigma; x_{i_1} x_0^{n_1} \ldots x_{i_k} x_0^{n_k}) = \frac{1}{n_1! \ldots n_k!} \int_\varsigma^z \int_\varsigma^{s_k} \cdots \int_\varsigma^{s_2} \kappa_\varsigma(s_1) \log^{n_1}\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$
$$\ldots \log^{n_k}\left(\frac{z}{s_k}\right) \mathrm{d}\alpha_\varsigma^{s_1}(x_{i_1}) \ldots \mathrm{d}\alpha_\varsigma^{s_k}(x_{i_k}).$$

Par conséquent, en utilisant la formule binomiale, nous avons:

$$\alpha_\varsigma^z(x_i x_0^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\log^{n-k}(z)}{(n-k)!} \int_\varsigma^z \frac{[-\log(s)]^k}{k!}\, \mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_i),$$

$$\alpha_\varsigma^z(x_i x_0^n x_j x_0^p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{q=0}^{p} \binom{k+q}{q} \frac{\log^{p-q}(z)}{(p-q)!}$$
$$\times \int_\varsigma^z \frac{[-\log^{k+q}(s)]}{(k+q)!} \int_\varsigma^s \frac{[-\log(r)]^{n-k}}{(n-k)!}\, \mathrm{d}\alpha_\varsigma^r(x_i)\, \mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_j).$$

D'où les expressions de $I_\varsigma^z(x_0^k x_i)$ et de $I_\varsigma^z(x_0^k x_i x_0^q x_j)$. $\square$

Proposition 2.3. *Avec les mêmes notations de la Proposition* 2.2, *pour tous entiers k et q, nous avons*:

$$I_\varsigma^z(x_0^k x_i) = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} [\log^l(z) \alpha_0^z(x_i x_0^{k-l}) - \log^l(\varsigma) \alpha_0^\varsigma(x_i x_0^{k-l})],$$

$$I_\varsigma^z(x_0^k x_i x_0^q x_j) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{r=0}^{l+q} \binom{l+q}{l} \frac{(-1)^r}{r!} [\log^r(z) \alpha_0^z(x_i x_0^k x_j x_0^{l+q-r})$$
$$-\log^r(\varsigma) \alpha_0^\varsigma(x_i x_0^k x_j x_0^{l+q-r})]$$
$$-\sum_{l=0}^{k} \sum_{r=0}^{q} \frac{(-1)^{l+r}}{l! r!} \log^l(\varsigma) \alpha_0^\varsigma(x_i x_0^{k-l}) [\log^r(z) \alpha_0^z(x_i x_0^{q-r})$$
$$-\log^r(\varsigma) \alpha_0^\varsigma(x_i x_0^{q-r})].$$

Preuve. En utilisant l'expression de $\alpha_0(x_i)$ nous vérifions que:

$$I_\varsigma^z(x_0^k x_i) = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{l\geqslant 1} g_{i,l}\int_\varsigma^z \log^k(s)s^{l-1+t}\,\mathrm{d}s = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{l\geqslant 1} g_{i,l}N_\varsigma^z(k,l,t_i).$$

Nous avons $N_\varsigma^z(0,l,t) = (z^{l+t} - \varsigma^{l+t})/(l+t)$ et $N_\varsigma^z(k,l,t) = [z^{l+t}\log^k(z) - \varsigma^{l+t}\log^k(\varsigma) - kN_\varsigma^z(k-1,l,t)]/(l+t)$. Nous pouvons alors prouver (par récurrence sur k) que:

$$N_\varsigma^z(k,l,t) = \frac{k!}{(-1)^k}\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{z^{l+t}\log^r(z) - \varsigma^{l+t}\log^r(\varsigma)}{(l+t)^{k-r+1}}.$$

D'après le Corollaire 2.1, cela donne l'expression désirée de $I_\varsigma^z(x_0^k x_i)$. Nous déduisons aussi que:

$$\begin{aligned}
I_\varsigma^z(x_0^k x_i x_0^q x_j) &= \sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{l+q}}{l!q!}\left[\int_\varsigma^z \log^{l+q}(s)\alpha_0^s(x_i x_0^{k-l})\,\mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_j)\right. \\
&\quad \left. -\log^l(\varsigma)\alpha_0^\varsigma(x_i x_0^{k-l})\int_\varsigma^z \log^q(s)\,\mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_j)\right] \\
&= \sum_{l=0}^{k}\binom{l+q}{l}\int_\varsigma^z \frac{[-\log(s)]^{l+q}}{(l+q)!}\alpha_0^s(x_i x_0^{k-l})\,\mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_j) \\
&\quad -\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{l!}\log^l(\varsigma)\alpha_0^\varsigma(x_i x_0^{k-l})I_\varsigma^z(x_0^q x_i).
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de $\alpha(x_i x_0^n)$, de $\mathrm{d}\alpha(x_j)$ et de $N_\varsigma^z(p,u,t_i+t_j)$, nous effectuons l'intégrale suivante:

$$\begin{aligned}
&\int_\varsigma^z \frac{[-\log(s)]^p}{p!}\alpha_0^s(x_i x_0^n)\,\mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x_j) \\
&= \sum_{u\geqslant 2}\left[\sum_{v=1}^{u-1}\frac{g_{i,v}g_{j,u-v}}{(v+t_i)^n}\right]\sum_{r=0}^{p}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{z^{u+t_i+t_j}\log^r(z) - \varsigma^{u+t_i+t_j}\log^r(\varsigma)}{(u+t_i+t_j)^{p-r+1}} \\
&= \sum_{r=0}^{p}\frac{(-1)^r}{r!}[\log^r(z)\alpha_0^z(x_i x_0^n x_j x_0^{p-r}) - \log^r(\varsigma)\alpha_0^\varsigma(x_i x_0^n x_j x_0^{p-r})].
\end{aligned}$$

D'après l'intégrale précédent et d'après l'expression de $I_\varsigma^z(x_0^k x_i)$, nous déduisons celle de $I_\varsigma^z(x_0^k x_i x_0^q x_j)$. □

2.2. L'évaluation des fractions rationnelles non commutatives $x_{i_1}(c_1x_0)^*\dots x_{i_p}(c_px_0)^*$

Proposition 2.4. *S'il existe un chemin d'intégration Γ_ς^z inclus dans $\mathscr{U}$ alors, pour tous nombres complexes c_1 et c_2 tels que $t_i - c_1, t_j - c_2$ et $t_i + t_j - c_2 \notin \mathbb{Z}_-^*$, nous* *avons*:

$$\alpha_\varsigma^z[x_i(c_1x_0)^*]=\sum_{k\geqslant 1} g_{i,k}\frac{z^{k+t_i}}{k+t_i-c_1}-\left(\frac{z}{\varsigma}\right)^{c_1}\sum_{k\geqslant 1} g_{i,k}\frac{\varsigma^{k+t_i}}{k+t_i-c_1},$$

$$\alpha_\varsigma^z[x_i(c_1x_0)^*x_j(c_2x_0)^*]=\sum_{k\geqslant 2}\left[\sum_{l=1}^{k}\frac{g_{i,l}g_{j,k-l}}{l+t_i-c_1}\right]\frac{z^{k+t_i+t_j}}{k+t_i+t_j-c_2}$$

$$-\left(\frac{z}{\varsigma}\right)^{c_2}\sum_{k\geqslant 2}\left[\sum_{l=1}^{k}\frac{g_{i,l}g_{j,k-l}}{l+t_i-c_1}\right]\frac{\varsigma^{k+t_i+t_j}}{k+t_i+t_j-c_2}.$$

Si, en particulier, $G_i(z)=z^{c_1}(1-z)^{-a_i}$ *et* $G_j(z)=z^{c_2}(1-z)^{-a_j}$ *alors nous avons*:

$$\alpha_0^z[x_i(c_1x_0)^*]=z^{c_1+t_i}\int_0^1 s^{t_i-1}(1-zs)^{-a_i}\,\mathrm{d}s,$$

$$\alpha_0^z[x_i(c_1x_0)^*x_j(c_2x_0)^*]$$

$$=z^{c_2+t_j}\int_0^1\int_0^1 (s_1s_2)^{t_i-1}(1-zs_1s_2)^{-a_i}s_2^{c_1+t_j}(1-zs_2)^{-a_j}\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2.$$

Preuve. D'après le théorème de convolution [13], nous avons l'évaluation suivante:

$$\alpha_\varsigma^z[\kappa_\varsigma;x_{i_1}(c_1x_0)^*\ldots x_{i_k}(c_kx_0)^*]$$

$$=\int_\varsigma^z\int_\varsigma^{s_k}\cdots\int_\varsigma^{s_2}\kappa_\varsigma(s_1)\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{c_1}\cdots\left(\frac{z}{s_k}\right)^{c_k}\mathrm{d}\alpha_\varsigma^{s_1}(x_{i_1})\ldots\mathrm{d}\alpha_\varsigma^{s_k}(x_{i_k}).$$

Par conséquent, en utilisant les expressions de G_1 et de G_2, nous obtenons:

$$\alpha_\varsigma^z[x_i(c_1x_0)^*]=z^{c_1}\sum_{k\geqslant 1} g_{i,k}\int_\varsigma^z s^{k-1+t_i-c_1}\,\mathrm{d}s,$$

$$\alpha_\varsigma^z[x_i(c_1x_0)^*x_j(c_2x_0)^*]=z^{c_2}\sum_{k\geqslant 1}\sum_{l=1}^{k}\frac{g_{i,l}g_{j,k-l+1}}{l+t_i-c_1}\int_\varsigma^z s^{k+t_i+t_j-c_2}\,\mathrm{d}s.$$

Puis, en intégrant, nous déduisons les premières expressions. Les autres expressions, correspondantes aux cas particuliers, sont immédiates en changeant s en zs dans les formes obtenues avec le théorème de convolution. □

Corollaire 2.2. *S'il existe un chemin d'intégration* Γ_0^z *inclus dans* $\mathcal{U}$ *alors, pour tous nombres complexes* c_1 *et* c_2 *tels que* t_i-c_1, t_j-c_2 *et* $t_i+t_j-c_2\notin\mathbb{Z}_-^*$, *nous* *avons*:

$$\text{(iv)}\quad \alpha_0^z[x_i(c_1x_0)^*]=\sum_{k\geqslant 1} g_{i,k}\frac{z^{k+t_i}}{k+t_i-c_1},$$

$$\text{(v)}\quad \alpha_0^z[x_i(c_1x_0)^*x_j(c_2x_0)^*]=\sum_{k\geqslant 2}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{g_{i,l}g_{j,k-l}}{l+t_i-c_1}\right]\frac{z^{k+t_i+t_j}}{k+t_i+t_j-c_2},$$

$$\text{(vi)}\quad \alpha_0^z[x_i(c_1x_0)^*\sqcup\!\sqcup\, x_j(c_2x_0)^*]=\sum_{k\geqslant 2}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{g_{i,l}g_{j,k-l}}{(l+t_i-c_1)(k-l+t_j-c_2)}\right] z^{k+t_i+t_j}.$$

Preuve. (iv) et (v) sont immédiates d'après la Proposition 2.4. Puisque:

$$\alpha[x_i(c_1x_0)^*\sqcup\!\sqcup\, x_j(c_2x_0)^*]=\alpha[x_i(c_1x_0)^*]\alpha[x_j(c_2x_0)^*]$$

alors, d'après (v), nous déduisons (vi). Nous pouvons obtenir également le même résultat à partir du fait que:

$$[x_i(c_1x_0)^*]\sqcup\!\sqcup[x_j(c_2x_0)^*]=x_i(c_1x_0)^*x_j[(c_1+c_2)x_0]^*+x_j(c_2x_0)^*x_i[(c_1+c_2)x_0]^*$$

et nous concluerons à l'aide de (v). □

Par conséquent, les fractions rationnelles non commutatives peuvent être utilisées pour représenter certaines fonctions (et séries) *hypergéométriques généralisées*. En utilisant la notation des fonctions hypergéométriques, nous avons (pour $G_i(z)=z^c(1-z)^{-a_i}$ et $\Re(t_i)>0$):

$$\alpha_0^z[x_i(cx_0)^*]=\frac{\Gamma(a_i)\Gamma(t_i+1-a_i)}{\Gamma(t_i+1)}z^{c+t_i}{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a_i,t_i\\ t_i+1\end{matrix}\Big| z\right).$$

Les sommations des polylogarithmes peuvent être aussi effectuées à l'aide de ces fonctions hypergéométriques.

Exemple 2.1. Soit $k>1$, alors: $\sum_{n\geqslant 0}(\frac{k-1}{k})^n\mathrm{Li}_{n+1}(-z^k)=-kz{}_2\mathrm{F}_1(\begin{smallmatrix}1,1/k\\ 1/k+1\end{smallmatrix}|-z^k)$. Par conséquent, puisque $\mathrm{Li}_n(-1)=-\eta(n)$, les sommations $\sum_{n\geqslant 1}(\frac{k-1}{k})^n\eta(n)$ donnent les nombres irrationnels $\frac{k^2}{k-1}{}_2\mathrm{F}_1(\begin{smallmatrix}1,1/k\\ 1/k+1\end{smallmatrix}|-1)$. Par exemple, nous avons les sommations suivantes (voir [13, 14] pour plus de précisions):

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\eta(n)=\pi,\qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\eta(n)=\frac{3}{2}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi,$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n\eta(n)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi,\ldots .$$

2.3. Exemple de fonctions de Dirichlet d'ordre n et de paramètre t

Soient $\{g_{1,k}\}_{k\geqslant 1}$ et $\{g_{2,k}\}_{k\geqslant 1}$ deux suites définies par $g_{1,k}=1$ et $g_{2,k}=(-1)^k$. Par conséquent:

$$\mathrm{d}\alpha(x_0)=\frac{\mathrm{d}z}{z},\qquad \mathrm{d}\alpha(x_1)=\frac{z^{t_1}\mathrm{d}z}{1-z}\quad\text{et}\quad \mathrm{d}\alpha(x_2)=\frac{z^{t_2}\,\mathrm{d}z}{1+z},$$

Pour tous entiers $n,p\geqslant 1$ et pour tous nombres complexes c_1,c_2 tels que t_i-c_1, t_j-c_2, $t_i+t_j-c_2\notin\mathbb{Z}_-^*$, on a:

$$\alpha_0^z(x_1x_0^{n-1})=z^{t_1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^k}{(k+t_1)^n},\qquad \alpha_0^z(x_2x_0^{m-1})=z^{t_2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-z)^k}{(k+t_2)^m},$$

$$\alpha_0^z(x_1x_0^{n-1}x_1x_0^{m-1})=z^{2t_1}\sum_{k\geqslant 2}\left[\frac{1}{(1+t_1)^n}+\frac{1}{(2+t_1)^n}+\cdots+\frac{1}{(k+t_1-1)^n}\right]\times\frac{z^k}{(k+2t_1)^m},$$

$$\alpha_0^z(x_1x_0^{n-1}x_2x_0^{m-1})=z^{t_1+t_2}\sum_{k\geqslant 2}\left[\frac{1}{(1+t_1)^n}-\frac{1}{(2+t_1)^n}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k+t_1-1)^n}\right]\times\frac{(-z)^k}{(k+t_1+t_2)^m},$$

$$\alpha_0^z(x_2x_0^{n-1}x_2x_0^{m-1})=z^{2t_2}\sum_{k\geqslant 2}\left[\frac{1}{(1+t_2)^n}+\frac{1}{(2+t_2)^n}+\cdots+\frac{1}{(k+t_2-1)^n}\right]\times\frac{(-z)^k}{(k+2t_2)^m},$$

$$\alpha_0^z(x_2x_0^{n-1}x_1x_0^{m-1})=z^{t_1+t_2}\sum_{k\geqslant 2}\left[\frac{1}{(1+t_2)^n}-\frac{1}{(2+t_2)^n}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k+t_2-1)^n}\right]\times\frac{z^k}{(k+t_1+t_2)^m},$$

$$\alpha_0^z(x_1x_0^{n-1}\sqcup\!\sqcup\, x_1x_0^{m-1})=z^{2t_1}\sum_{k\geqslant 2}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(l+t_1)^n(k-l+t_2)^m}\right]z^k,$$

$$\alpha_0^z(x_1x_0^{n-1}\sqcup\!\sqcup\, x_2x_0^{m-1})=z^{t_1+t_2}\sum_{k\geqslant 2}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(l+t_1)^n(k-l+t_2)^m}\right](-z)^k,$$

$$\alpha_0^z(x_2x_0^{n-1} \sqcup x_2x_0^{n-1}) = z^{2t_2} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(l+t_1)^n(k-l+t_2)^m} \right] (-z)^k,$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*] = z^{t_1} \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^k}{k+t_1-c_1}, \qquad \alpha_0^z[x_2(c_2x_0)^*] = z^{t_2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-z)^k}{k+t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*x_1(c_2x_0)^*] = z^{2t_1} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l+t_1-c_1} \right] \frac{z^k}{k+2t_1-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^*x_2(c_2x_0)^*] = z^{t_1+t_2} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l+t_1-c_1} \right] \frac{(-z)^k}{k+t_1+t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_2(c_1x_0)^*x_2(c_2x_0)^*] = z^{2t_2} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l+t_2-c_1} \right] \frac{(-z)^k}{k+2t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_2(c_1x_0)^*x_1(c_2x_0)^*] = z^{t_1+t_2} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l+t_2-c_1} \right] \frac{z^k}{k+t_1+t_2-c_2},$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^* \sqcup x_1(c_2x_0)^*] = z^{2t_1} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(l+t_1-c_1)(k-l+t_1-c_2)} \right] z^k,$$

$$\alpha_0^z[x_1(c_1x_0)^* \sqcup x_2(c_2x_0)^*] = z^{t_1+t_2} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(l+t_1-c_1)(k-l+t_2-c_2)} \right] (-z)^k,$$

$$\alpha_0^z[x_2(c_1x_0)^* \sqcup x_2(c_2x_0)^*] = z^{2t_2} \sum_{k\geqslant 2} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(l+t_2-c_1)(k-l+t_2-c_2)} \right] (-z)^k.$$

Ainsi, pour $t_1 = 0$ et pour $n, p \geqslant 1$, l'évaluation des mots de la forme $x_1^p x_0^n$ donne aussi les polylogarithmes étudiés par Nielsen dans [24]:

$$L_{1,p}(z) = \frac{1}{p!} \log^p \left(\frac{1}{1-z} \right), \qquad L_{n,p}(z) = \int_0^z L_{n-1,p}(s) \frac{ds}{s}.$$

Si on note comme Nielsen [22–24]:

$$s_n = \alpha_0^1(x_1x_0^{n-1}) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^n},$$

$$s_{n,p} = \alpha_0^1(x_1^p x_0^{n-1}) = \sum_{k\geqslant p} \frac{S_k^{(k-p)}}{(k-1)!} \frac{1}{k^n},$$

$$c_{n,p} = \alpha_0^1(x_1x_0^{n-1}x_1x_0^{p-1}) = \sum_{k\geqslant 2} H_{k-1}^{(n)} \frac{1}{k^p},$$

où les $S_k^{(p)}$ sont les nombres de Stirling et les $H_k^{(n)}$ sont les nombres harmoniques, alors:

1. Nielsen a montré que [22]:

$$s_n s_p = s_{n+p} + c_{n,p} + c_{p,n}, \quad (\text{pour } n>1, p>1),$$

$$s_{p+1} = \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p+1-j}, \quad (\text{pour } p>1),$$

$$c_{n,p} = (-1)^n \sum_{j=0}^{p-2} \binom{n+j-1}{n-1} c_{n+j,p-j} + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j \binom{p+j-1}{p-1} s_{n-j} s_{p+j}$$
$$-(-1)^n \binom{p+n-2}{p-1} (s_{p+n} + c_{1,p+n-1}), \quad (\text{pour } n>0, \ p>1),$$

$$c_{1,p} = \frac{p}{2} s_{p+1} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{p-2} s_j s_{p+1-j}, \quad (\text{pour } p>2).$$

On en déduit alors en particulier (rappelons aussi que $\mathrm{Li}_2(1) = \pi^2/6$ et que $\mathrm{Li}_4(1) = \pi^4/90$):

$$\sum_{k\geqslant 2} H_{k-1}^{(1)} \frac{1}{k^2} = \mathrm{Li}_3(1),$$

$$\sum_{k\geqslant 2} H_{k-1}^{(1)} \frac{1}{k^3} = \frac{3}{2}\mathrm{Li}_4(1) - \frac{1}{2}[\mathrm{Li}_2(1)]^2 = \frac{\pi^4}{360},$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k\geqslant 2} H_{k-1}^{(1)} \frac{1}{k^p} = \frac{p}{2}\mathrm{Li}_{p+1}(1) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{p-2} \mathrm{Li}_j(1)\mathrm{Li}_{p+1-j}(1), \quad (\text{pour } p>2),$$

$$\sum_{k\geqslant 2} H_{k-1}^{(2)} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}[\mathrm{Li}_2(1)]^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_4(1) = \frac{\pi^4}{120},$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k\geqslant 2} H_{k-1}^{(p)} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{2}[\mathrm{Li}_p(1)]^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_{2p}(1), \quad (\text{pour } p>1).$$

2. Nielsen a montré également que [23,24]: "*La somme de la série numérique $s_{n,p}$ peut s'exprimer sous forme d'un polynôme entier en les nombres $s_2, s_3, \ldots, s_{n+p}$, et homogène du degré $(n+p)$ dans ces quantités si nous supposons s_r du degré r; les coefficients du polynôme sus-dit sont des nombres rationnels.*"

3. L'évaluation des mots de Lyndon et des mots de Širšov

Nous allons calculer l'évaluation des mots de Lyndon (resp. de Širšov) [12,15–17]. Pour cela, équipons l'alphabet X de l'ordre total, noté '$<$'. Nous considérons sur X^*, ensuite, l'ordre lexicographique (resp. l'ordre lexicographique inverse) comme suit:

$$u<v \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } \exists w\in X^*,\ w\neq\varepsilon & \text{tel que } uw=v \\ & (\text{resp. } wu=v), \\ \text{soit } \exists f,g,h\in X^*,\ x,y\in X,\ x<y & \text{tel que } u=fxg,\ v=fyh \\ & (\text{resp. } u=fxh,\ v=gyh). \end{cases}$$

Définition 3.1 (*Viennot* [32]). Un mot est un mot de Lyndon (resp. de Širšov) si et seulement si il est strictement plus petit que ses facteurs droits (resp. gauches) pour l'ordre lexicographique (resp. l'ordre lexicographique inverse). Nous notons $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{S}$) l'ensemble des mots de Lyndon (resp. de Širšov) sur X.

Exemple 3.1. Soit $X=\{x_0,x_1\}$ avec $x_0<x_1$, les mots de Lyndon (resp. de Širšov) de longueur au plus 5 sur X^* sont les 14 mots:

$$\mathscr{L}_{\leqslant 5}=\{x_0,x_0^4x_1,x_0^3x_1,x_0^3x_1^2,x_0^2x_1,x_0^2x_1x_0x_1,x_0^2x_1^2,x_0^2x_1^3,x_0x_1,x_0x_1x_0x_1^2,$$
$$x_0x_1^2,x_0x_1^3,x_0x_1^4,x_1\}$$

$$(\text{resp. } \mathscr{S}_{\leqslant 5}=\{x_0,x_1x_0^4,x_1x_0^3,x_1^2x_0^3,x_1x_0^2,x_1x_0x_1x_0^2,x_1^2x_0^2,x_1^3x_0^2,x_1x_0,x_1^2x_0x_1x_0,$$
$$x_1^2x_0,x_1^3x_0,x_1^4x_0,x_1\}).$$

Présentée comme ci-dessus, la liste $\mathscr{L}_{\leqslant 5}$ (resp. $\mathscr{S}_{\leqslant 5}$) est dans l'ordre lexicographique (resp. l'ordre lexicographique inverse) croissante. Les éléments de $\mathscr{S}_{\leqslant 5}$ sont l'image miroir de ceux de $\mathscr{L}_{\leqslant 5}$.

Lemme 3.1 (Factorisations standard, Viennot [32]). Si b est un mot de Lyndon (resp. Širšov) alors b peut s'écrit de façon unique comme suit:

$$\begin{cases} \textit{soit } b\in X, \\ \textit{soit } b=ml, \text{ où } l,m\in\mathscr{L} \ (\textit{resp. } \mathscr{S}) \textit{ et } m<l \ (\textit{resp. } l<m). \end{cases}$$

Le couple (m,l) est appelé la *factorisation standard* de b.

Définition 3.2 (*Viennot* [32]). Pour chaque mot de Lyndon (resp. de Širšov), nous posons récursivement:

$$\begin{cases} \text{si } b\in X & \text{alors } P_b=b & (\text{resp.} Q_b=b) \\ \text{si } st(b)=(m,l) & \text{alors } P_b=[P_m,P_l] & (\text{resp.} Q_b=[Q_m,Q_l]). \end{cases}$$

Théorème 3.1 (Viennot [32]). La famille $\{P_b\}_{b\in\mathscr{L}}$ (resp. $\{Q_b\}_{b\in\mathscr{S}}$) forme une base de l'algèbre de Lie libre $Lie\langle X\rangle$, appelée base de Lyndon (resp. de Širšov).

Lemme 3.2 (Viennot [32]). *Chaque mot w de X^* peut s'écrire de manière unique comme une factorisation par les mots de Lyndon (resp. de Širšov):*

$$w = l_1^{i_1} l_2^{i_2} \dots l_k^{i_k},$$

où chaque l_i est un mot de Lyndon (resp. de Širšov) et $l_k < l_{k-1} < \cdots < l_1$ (resp. $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$).

Lemme 3.3 (Théorème de Radford, [25,26]). *Soit $l_1^{i_1} l_2^{i_2} \dots l_k^{i_k}$ la factorisation de w par les mots de Lyndon (ou de Širšov). Alors on a (les c_u sont les constantes entières):*

$$\frac{1}{i_1! \dots i_k!} l_1^{\sqcup\!\sqcup\, i_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, l_k^{\sqcup\!\sqcup\, i_k} = w + \sum_{u\in X^{|w|}, u<w} c_u u.$$

Ainsi, pour tout mot w, son Evaluation peut s'effectuer à l'aide de l'évaluation des mots de Lyndon ou de Širšov.

Théorème 3.2 (Théorème Poincaré–Birkoff–Witt [32]). *Soit $l_1^{i_1} l_2^{i_2} \dots l_k^{i_k}$ la factorisation de w par les mots de Lyndon (resp. de Širšov), on pose:*

$$Q_w = Q_{l_1}^{i_1} Q_{l_2}^{i_2} \dots Q_{l_k}^{i_k}.$$

Les $\{Q_w\}_{w\in X^*}$ forme la base PBW-Lyndon (resp. PBW-Širšov) de l'algèbre associative des polynômes sur X.

Définition 3.3 (*Bases duales* [15–17,21,26]). On définit les polynômes $\{L_w\}_{w\in X^*}$ les polynômes $\{R_w\}_{w\in X^*}$, homogènes de degré $|w|$, récursivement comme suit:

$$L_w = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } w = \varepsilon, \\ xL_v & \text{si } w = xv \in \mathscr{L},\ (x\in X, v\in X^*), \\ \dfrac{1}{i_1!\dots i_k!} L_{l_1}^{\sqcup\!\sqcup\, i_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, L_{l_k}^{\sqcup\!\sqcup\, i_k} & \text{si } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k},\ (l_i \in \mathscr{L} \text{ et } l_k < \dots < l_1), \end{cases}$$

$$R_w = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } w = \varepsilon, \\ R_v x & \text{si } w = vx \in \mathscr{S},\ (x\in X,\ v\in X^*), \\ \dfrac{1}{i_1!\dots i_k!} R_{l_1}^{\sqcup\!\sqcup\, i_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, R_{l_k}^{\sqcup\!\sqcup\, i_k} & \text{si } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, (l_i \in \mathscr{S} \text{ et } l_1 < \cdots < l_k). \end{cases}$$

Théorème 3.3 (Jacob [15–17] and Reutenauer [26]). Les $\{L_b\}_{b\in\mathscr{L}}$ (resp. $\{R_b\}_{b\in\mathscr{S}}$) forment une base de transcendance de l'algèbre des polynômes pour le produit de mélange. Elle est la base duale de la base PBW-Lyndon (resp. PBW-Širšov).

Exemple 3.2. Soit $X=\{x_0,x_1\}$ avec $x_0<x_1$, alors on vérifie aisément que, pour $n,\ p\geqslant 0$, $x_1^p x_0^n = R_{x_1^p x_0^n}$. Les autres mots de Širšov s'expriment aussi en fonction de R_b (et vice versa, voir le Lemme 3.3). Par exemple $x_1x_0x_1x_0^2 = R_{x_1x_0x_1x_0^2} - 2R_{x_1^2x_0^3}$ et $x_1^2x_0x_1x_0 = R_{x_1^2x_0x_1x_0} - 3R_{x_1^3x_0^2}$, car:

$b\in\mathscr{S}_{\leqslant 5}$	$st(b)$	Q_b	R_b
x_0	x_0	x_0	$R_{x_0}=x_0$
$x_1x_0^4$	$(x_1x_0^3,x_0)$	$[Q_{x_1x_0^3},Q_{x_0}]$	$R_{x_1x_0^3}x_0=x_1x_0^4$
$x_1x_0^3$	$(x_1x_0^2,x_0)$	$[Q_{x_1x_0^2},Q_{x_0}]$	$R_{x_1x_0^2}x_0=x_1x_0^3$
$x_1^2x_0^3$	$(x_1^2x_0^2,x_0)$	$[Q_{x_1^2x_0^2},Q_{x_0}]$	$R_{x_1^2x_0^2}x_0=x_1^2x_0^3$
$x_1x_0^2$	(x_1x_0,x_0)	$[Q_{x_1x_0},Q_{x_0}]$	$R_{x_1x_0}x_0=x_1x_0^2$
$x_1x_0x_1x_0^2$	$(x_1x_0,x_1x_0^2)$	$[Q_{x_1x_0},Q_{x_1x_0^2}]$	$\frac{1}{2}R_{x_1x_0}^{\sqcup\!\sqcup\,2}x_0=x_1x_0x_1x_0^2+2\,x_1^2x_0^3$
$x_1^2x_0^2$	$(x_1^2x_0,x_0)$	$[Q_{x_1^2x_0},Q_{x_0}]$	$R_{x_1^2x_0}x_0=x_1^2x_0^2$
$x_1^3x_0^2$	$(x_1,x_1^2x_0^2)$	$[Q_{x_1},Q_{x_1x_0^2}]$	$R_{x_1^3x_0}x_0=x_1^3x_0^2$
x_1x_0	(x_1,x_0)	$[Q_{x_1},Q_{x_0}]$	$R_{x_1x_0},=x_1x_0$
$x_1^2x_0x_1x_0$	$(x_1^2x_0,x_1x_0)$	$[Q_{x_1^2x_0},Q_{x_1x_0}]$	$R_{x_1^2x_0x_1}x_0=x_1^2x_0x_1x_0+3\,x_1^3x_0^2$
$x_1^2x_0$	(x_1,x_1x_0)	$[Q_{x_1},Q_{x_1x_0}]$	$\frac{1}{2}R_{x_1}^{\sqcup\!\sqcup\,2}x_0=x_1^2x_0$
$x_1^3x_0$	$(x_1,x_1^2x_0)$	$[Q_{x_1},Q_{x_1^2x_0}]$	$\frac{1}{3!}R_{x_1}^{\sqcup\!\sqcup\,3}x_0=x_1^3x_0$
$x_1^4x_0$	$(x_1,x_1^3x_0)$	$[Q_{x_1},Q_{x_1^3x_0}]$	$\frac{1}{4!}R_{x_1}^{\sqcup\!\sqcup\,4}x_0=x_1^4x_0$
x_1	x_1	x_1	$R_{x_1}=x_1$

Théorème 3.4 (Hoang Ngoc Minh, Jacob and Oussous [12] and Jacob [15–17]). *Le schéma d'évaluation des $\{L_b\}_{b\in\mathscr{L}}$ (resp. $\{R_b\}_{b\in\mathscr{S}}$) est le suivant*:

$$\alpha_\varsigma^z(L_w) = \begin{cases} 1 & si\ w=\varepsilon, \\ \alpha_\varsigma^z[\alpha_\varsigma^z(x);L_v] & si\ w=xv\in\mathscr{L},\ (x\in X, v\in X^*), \\ \dfrac{1}{i_1!\dots i_k!}[\alpha_\varsigma^z(L_{l_1})]^{i_1}\dots[\alpha_\varsigma^z(L_{l_k})]^{i_k} & si\ w=l_1^{i_1}\dots l_k^{i_k},\ (l_i\in\mathscr{L}\ et\ l_k<\dots<l_1), \end{cases}$$

$$\alpha_\varsigma^z(R_w) = \begin{cases} 1 & si\ w=\varepsilon, \\ \int_\varsigma^z \alpha_\varsigma^s(R_v)\mathrm{d}\alpha_\varsigma^s(x) & si\ w=vx\in\mathscr{S},\ (x\in X, v\in X^*), \\ \dfrac{1}{i_1!\dots i_k!}[\alpha_\varsigma^z(R_{l_1})]^{i_1}\dots[\alpha_\varsigma^z(R_{l_k})]^{i_k} & si\ w=l_1^{i_1}\dots l_k^{i_k},\ (l_i\in\mathscr{S}\ et\ l_1<\dots<l_k). \end{cases}$$

Définition 3.4. Nous définissons les *polylogarithmes de Nielsen* comme étant l'évaluation de $\{R_b\}_{b\in\mathscr{S}}$ par rapport aux formes différentielles rationnelles.

4. L'évaluation des séries rationnelles

Nous allons chercher à calculer systématiquement l'évaluation des séries rationnelles [1]. Pour simplifier, soit S une série rationnelle sur $X=\{x_0,x_1\}$ et soit (λ,μ,γ) sa représentation matricielle minimale de dimension N. Nous considérons aussi le morphisme de monoïde ρ défini par $\rho(x)=\mu(x)x,\ x\in X$.

4.1. L'évaluation des séries rationnelles mises sous la forme graduée

Puisque $\{x_0,x_1\}^*=x_0^*(x_1x_0^*)^*$ [32], nous mettons la série rationnelle S sous la forme graduée suivante:

$$S=\sum_{p\geqslant 0}\lambda\rho(x_0^*)[\rho(x_1x_0^*)]^p\gamma.$$

Si la matrice $\rho(x_0^*x_1)$ est nilpotente d'ordre $K+1$ alors (et inversement):

$$S=\sum_{p=0}^{K}\lambda\rho(x_0^*)[\rho(x_1x_0^*)]^p\gamma.$$

Ainsi, en observant la nilpotence de la matrice $\rho(x_0^*x_1)$, nous pouvons décider si la série rationnelle S peut se développer en combinaison linéaire d'un nombre fini de fractions rationnelles non commutatives de la forme $(c_0x_0)^*x_{i_1}(c_1x_0)^*\dots x_{i_p}(c_px_0)^*$. A la Section 2, nous avons aussi vu que ces fractions peuvent être utilisées pour coder certaines fonctions du type hypergéométrique. Par conséquent, nous pouvons décider si l'évaluation d'une série rationnelle se décompose en combinaison linéaire finie de fonctions du type hypergéométrique construite à partir des formes différentielles $\{\mathrm{d}x(x)\}_{x\in X}$.

Exemple 4.1. Soit la représentation linéaire de la série rationnelle, S_1, suivante:

$$\lambda=(1\quad 0),\qquad \mu(x_0)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad \mu(x_1)=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\qquad \gamma=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\rho(x_0^*) = \begin{pmatrix} x_0^* & x_0^* x_0 x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix} \text{ et } \rho(x_1 x_0^*) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 x_0^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'ordre 2. Par conséquent:

$$S_1 = x_0^* x_0 x_0^* - x_0^* x_1 x_0^* = x_0^* ш (x_0 - x_1)$$

Pour les formes différentielles $\mathrm{d}\alpha(x_0) = \mathrm{d}z/z$, $\mathrm{d}\alpha(x_1) = \mathrm{d}z/(1-z)$, nous avons $\alpha_\varsigma^z(S_1) = (z/\varsigma)\log\{[z(1-z)]/[\varsigma(1-\varsigma)]\}$.

4.2. *L'évaluation des séries rationnelles échangeables*

Si la série rationnelle S est échangeable ($\mu(x_0 x_1) = \mu(x_1 x_0)$) alors elle peut se décomposer en *éléments simples*, c'est-à-dire elle peut s'écrire comme une somme finie de mélanges de séries rationnelles sur une seule lettre:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{w \in X^*} \lambda\mu(w)\gamma\, w \\ &= \sum_{i,j \geqslant 0} \lambda\mu(x_0^i)\mu(x_1^j)\gamma\, x_0^i ш x_1^j \\ &= \sum_{i,j \geqslant 0} \lambda\mu(x_0^i)[\gamma_1\lambda_1 + \cdots + \gamma_N\lambda_N]\mu(x_1^j)\gamma\, x_0^i ш x_1^j \\ &= \lambda\rho(x_0^*)\gamma_1 ш \lambda_1\rho(x_1^*)\gamma + \cdots + \lambda\rho(x_0^*)\gamma_N ш \lambda_N\rho(x_1^*)\gamma, \end{aligned}$$

où les vecteurs lignes (resp. colonnes) λ_k (resp. γ_k) sont tels que la somme $\gamma_1\lambda_1 + \cdots + \gamma_N\lambda_N$ fasse la matrice d'identité. Par exemple, on peut supposer que les composants sont nuls sauf celui à la $k^{\text{ème}}$ place qui vaut 1. Ainsi, nous pouvons calculer entièrement l'évaluation de la série rationnelle échangeable S comme un polynôme en logarithmes (primitives des entrées).

Exemple 4.2. Soit la représentation linéaire de la série rationnelle, S_2, suivante:

$$\lambda = (1 \quad 0), \qquad \mu(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ici, la matrice $\rho(x_1 x_0^*) = \begin{pmatrix} x_1 x_0^* & x_1 x_0^* x_0 x_0^* - x_1 x_0^* \\ 0 & x_1 x_0^* \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente. Par conséquent, la méthode en 4.1 n'est pas applicable. Par contre, la série est échangeable et nous avons:

$$\begin{aligned} S_2 &= (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0^* & x_0^* x_0 x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ш (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_1^* & -x_1^* x_1 x_1^* \\ 0 & x_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0^* & x_0^* x_0 x_0^* \\ 0 & x_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ш (0 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1^* & -x_1^* x_1 x_1^* \\ 0 & x_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_0^* ш x_1^* ш x_0 - x_0^* ш x_1^* ш x_1 \\ &= x_0^* ш x_1^* ш (x_0 - x_1). \end{aligned}$$

Pour les mêmes formes différentielles que précédemment, nous avons

$$\alpha_{\varsigma}^{z}(S_2)=\frac{z}{\varsigma}\frac{1-\varsigma}{1-z}\log\left(\frac{z}{\varsigma}\frac{1-z}{1-\varsigma}\right).$$

4.3. L'évaluation des séries rationnelles mises sous la forme factorisée

Puisque l'évaluation de la série rationnelle S peut s'obtenir comme l'image de la série double $\sum_{w\in X^*} w\otimes w$: par le morphisme $\mu\otimes\alpha$ (rapellons que μ est le morphisme de monoïde pour le produit de Cauchy et α est le morphisme de monoïde pour le produit de mélange):

$$\alpha(S)=\lambda\left[\sum_{w\in X^*}\mu(w)\alpha(w)\right]\gamma=\lambda\left[\mu\otimes\alpha\left(\sum_{w\in X^*}w\otimes w\right)\right]\gamma,$$

alors la factorisation de cette série double [12,15–17,21,26]:

$$\sum_{w\in X^*} w\otimes w=\prod_{\substack{l\in\mathscr{L}\\ \text{lexicographique décroissant}}}\exp(L_l\otimes P_l)$$

$$=\prod_{\substack{l\in\mathscr{S}\\ \text{lexicographique inverse décroissant}}}\exp(R_l\otimes Q_l).$$

nous permet aussi de déduire l'expression exacte ou approchée cette évaluation suivant que l'algèbre de Lie engendrée par les matrices $\{\mu(x)\}_{x\in X}$ est nilpotente d'ordre K ou non (voir les notations de la Section 3):

$$\alpha(S)=\lambda\left[\prod_{\substack{l\in\mathscr{L}_{\leqslant k}\\ \text{lexicographique décroissant}}}\mathrm{e}^{\alpha_{\varsigma}^{z}(L_l)\mu(P_l)}\right]\gamma$$

$$=\lambda\left[\prod_{\substack{l\in\mathscr{S}_{\leqslant k}\\ \text{lexicographique inverse décroissant}}}\mathrm{e}^{\alpha_{\varsigma}^{z}(R_l)\mu(Q_l)}\right]\gamma.$$

Dans le cas nilpotent, avec les mêmes formes différentielles que précédemment, l'évaluation s'exprime en sommes et produits finis de polylogarithmes de Nielsen et leur exponentielle.

Exemple 4.3. Pour les séries rationnelles échangeables, l'algèbre de Lie engendrée par les matrices $\{\mu(x)\}_{x\in X}$ est automatiquement nilpotente d'ordre 2. Inversement, si cette algèbre est nilpotente d'ordre 2 alors la série rationnelle correspondante est trivialement échangeable. Ainsi, pour l'Exemple 4.2, la technique de factorisation donne le même résultat. La technique en 4.2 est plus avantageuse lorsqu'on a besoin expliciter la série génératrice.

Remerciement

Ce travail, ainsi que [13,14], est influencé par l'exposé de Z. Wojtkowiak lors de la réunion de travail du GdR MEDICIS (Luminy, Octobre 1992) et il a bénéficié d'un BQR de l'université Lille II. Nous voudrions exprimer notre reconnaissance envers G. Jacob pour les discussions et les suggestions fructueuses. Nous voudrions remercier également M. Huttner pour le prêt des livres de L. Lewin.

References

[1] J. Berstel, C. Reutenauer, Rational Series and their Languages, Springer, Berlin, 1988.
[2] F. Boussemart, La simulation graphique interactive des systèmes dynamiques non linéaires: conception et réalisation en Scratchpad, Thèse, Université Lille I, Lille 1992.
[3] K.T. Chen, Iterated path integrals, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 831–879.
[4] M. Fliess, Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. Soc. Math. France 109 (1981) 3–40.
[5] M. Fliess, M. Lamnabhi, F. Lamnabhi-Lagarrigue, An algebraic approach to nonlinear functional expansions, IEEE Trans. Circuit Systems CAS-30 (1983) 241–258.
[6] C. Hespel, Approximation des séries formelles par des séries rationnelles, RAIRO Inform. Théory 18 (1984) 334–349.
[7] C. Hespel, Truncated bilinear approximants: Carlemen, finite Volterra, Padé-type, geometrical and structural automata, dans Algebraic Comlputing in Control, Springer, Berlin, 1991, pp. 264–278.
[8] C. Hespel, G. Jacob, Calcul des approximations locales bilinéaires de systèmes analytiques, RAIRO APII, 23 (1989) 334–349.
[9] C. Hespel, G. Jacob, Approximation of nonlinear dynamics systems by rational series, Theoret. Comput. Sci. 79 (1991) 151–162.
[10] Hoang Ngoc Minh, G. Jacob, Symbolic Calculus and Volterra Series, IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design, Capri, Italie, 1989.
[11] Hoang Ngoc Minh, G. Jacob, Evaluation Transform and its implementation in MACSYMA, dans New Trends in Systems Theory, Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, Basel, 1991, pp. 401–408.
[12] Hoang Ngoc Minh, G. Jacob, N. Oussous, Input/Output Behaviour of Nonlinear Control Systems: Rational Approximations, Nilpotent structural Approximations, dans Analysis of controlled Dynamical Systems, Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, Basel, 1991, pp. 253–262.
[13] Hoang Ngoc Minh, Summations of Polylogarithms via Evaluation Transform, dans Mathematics and Computers in Simulation 42 (1996) 707–728.
[14] Hoang Ngoc Minh, Chained System Steering With Singular Inputs, New Computer Technologies in Control Systems, Pereslavl-Zalessky, Russia, 1994.
[15] G. Jacob, Lyndon Discretization and Exact Motion Planning, 1st European Control Conf., Grenoble, 1991.
[16] G. Jacob, Nonholonomic motion planning in nilpotent case and algebraic equation systems, dans Risler, Bellaiche (Eds.), Journées non Holonomes, Birkhäuser, Basel, to appear.
[17] G. Jacob, Algebraic computation tools and dynamic motion planning problem, European Control Conf., Groningen, 1993.
[18] F. Lamnabhi-Lagarrigue, P. Leroux, G. Viennot, Combinatorial Approximations of Volterra Series by Bilinear Systems, dans New Trends in Systems Theory, Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, Basel, 1991, pp. 304–315.
[19] P. Leroux, G. Viennot, A Combinatorial Approach to Nonlinear Functional Expansions: an Introduction With Example, Theoret. Comput. Sci. 79 (1991) 179–194.
[20] L. Lewin, Polylogarithms and Associated Functions, North-Holland, Amsterdam, 1981.
[21] G. Mélançon, C. Reutenauer, Lyndon words, free algebras and shuffles, Can. J. of Math. 41 (1989) 577–591.

[22] N. Nielsen, Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues, Ann. Matematica 9 (1904) 190–210.

[23] N. Nielsen, Note sur quelques séries de puissance trouvées dans la théorie de la fonction gamma, Ann. di Matematica 9 (1904) 211–218.

[24] N. Nielsen, Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel, Ann. Matematica 9 (1904) 219–235.

[25] D.E. Radford, A natural ring basis for shuffle algebra and an application to group schemes, J. Algebra 58 (1979) 432–454.

[26] C. Reutenauer, Free Lie Algebras, London Math. Soc. Monog. 7 (new series), Clarendon Press–Oxford Sciences Publications, Oxford, 1993.

[27] W.J. Rugh, Nonlinear System Theory, The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1981.

[28] M. Schetzen, The Volterra and Wiener Theories of nonlinear systems, Wiley, New York, 1980.

[29] J.F. Spina, D.D. Wiener, Sinusoidal Analysis and Modeling of Weakly Nonlinear Circuits, Van Nostrand Reinhold, New York, 1980.

[30] R.S. Strichartz, Campbell–Baker–Hausdorff–Dynkin formula and solutions of differential equations, J. Funct. Anal. 72 (1987) 320–345.

[31] H.J. Susmann, A product expansion for Chen Series, dans Theory and Applications of Nonlinear Control Systems, Elsevier, Amsterdam, 1986, pp. 323–335.

[32] G. Viennot, Algèbres de Lie libres et monoïdes libres, Lecture Notes in Math., vol. 691, Springer, Berlin, 1978.